

- Herkömmliche Symmetrie (wie wir sie bis jetzt für Kurvendiskussionen kennen)
- Wenn im Polynom nur gerade Exponenten auftauchen (Hinweis auf x^0), dann symmetrisch zur Y-Achse (Nachweis durch $f(x) = f(-x)$)
- Wenn im Polynom nur ungerade Exponenten vorkommen, dann punktsymmetrisch zum Ursprung (Nachweis mit $-f(x) = f(-x)$)
- Jetzt allgemeiner: Symmetrie zu einer beliebigen Achse $x = x_0$

Achsensymmetrischer Graph $f(x) = x^2$ wird verschoben um eine Einheit nach rechts und nach oben:

Grafik 1

Für $f(x) = x^2$ gilt ja $f(x) = f(-x)$ da $(x)^2 = (-x)^2$

Der verschobene Graph hat aber als Funktionsgleichung

$$f(x) = (x-1)^2 + 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 \text{ (keine einfache Symmetrie mehr}$$

feststellbar). Aus dem Graphen kann man erahnen, daß die Funktion Symmetrisch bzgl. $x = 1$ ist, der Nachweis hierfür wird über diesen Zusammenhang hergestellt:

Jede Funktion, für die gilt $f(x + x_0) = f(-x + x_0)$ ist symmetrisch zu einer Achse $x = x_0$

Hier eingesetzt:

$$((x + 1) - 1)^2 + 1 = x^2 + 1$$

$$((-x + 1) - 1)^2 + 1 = (-x)^2 + 1$$

Beide Seiten sind also gleich, die Funktion ist symmetrisch

(Die Funktion wird einfach „verschoben“)

- Allgemeine Punktsymmetrie zu einem beliebigen Punkt $P(x_0|y_0)$

Für $f(x) = x^3 + x$ müßte, damit die Funktion symmetrisch zum Ursprung ist (da ja nur ungerade Faktoren vorkommen), gelten: $-f(x) = f(-x)$, also: $-x^3 - x = (-x)^3 + (-x)$ Damit ist die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung.

Grafik 2

Was ist aber mit

$$f(x) = x^3 + x^2$$

Grafik 3

Da die Funktion auch gerade Exponenten enthält, läßt sich die einfache Merkregel nicht mehr so leicht anwenden. Auch hier fällt sofort eine

vermutete Symmetrie zum Punkt $P(-\frac{1}{3} | \frac{8}{27})$ auf. Wie ich auf den Punkt komme, erfahrt ihr im zweiten Teil des Referates.

Damit eine Funktion punktsymmetrisch zu einem Punkt ist, müssen sich die y-Werte (also die Funktionswerte) bei gleicher Entfernung auf der X-Achse zum Punkt nur im Vorzeichen unterscheiden, also betragsgleich sein.

Dies wird durch ein „Minus“ vor dem Funktionsterm erreicht. Da der Punkt nicht immer auf der X-Achse liegen muß, muß ein mal der Y-Wert des Punktes addiert, und ein mal subtrahiert werden. Damit der eingesetzte X-Wert in die Funktion in Relation zum X-Wert des Symmetriepunktes stehen kann, wird dieser stets zum eingesetzten X-Wert addiert.

Man erhält also die Bedingung:

Jede Funktion, für die gilt $-f(x + x_0) + y_0 = f(-x + x_0) - y_0$ ist symmetrisch zu einem Punkt $P(x_0|y_0)$

Für unsere Funktion konkret bedeutet dies:

$$-((x - \frac{1}{3})^3 + (x - \frac{1}{3})^2) + \frac{8}{27} = ((-x - \frac{1}{3})^3 + (-x - \frac{1}{3})^2) - \frac{8}{27}$$

Und tatsächlich erhält man

$$-x^3 + \frac{1}{3}x + \frac{6}{27} = -x^3 + \frac{1}{3}x + \frac{6}{27}$$

Die Funktion ist also punktsymmetrisch. Wie kommt man jetzt zu der Annahme, daß $P(-\frac{1}{3} | \frac{8}{27})$ Symmetriepunkt der Funktion sei?

- Dieser Punkt ist für $f(x)$ Wendepunkt der Funktion, also beweisen wir: Jede ganzrationale Funktion dritten Grades ist symmetrisch bzgl. ihres Wendepunktes.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f(x)' = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f(x)'' = 6ax + 2b$$

Die zweite Ableitung gleich 0 gesetzt, bringt den X-Wert für den

Wendepunkt, also $x = -\frac{b}{3a}$ und für den Y-Wert $y = \frac{2b^2}{27a^2} - \frac{cb}{3a} + d$

Dies in unsere Ursprungsbedingung eingesetzt ergibt einen sehr langen Term, an dessen Ende tatsächlich $0 = 0$ steht. Der Term:

$$-(a(x - \frac{b}{3a})^3 + b(x - \frac{b}{3a})^2 + c(x - \frac{b}{3a}) + d) + \frac{2b^2}{27a^2} - \frac{cb}{3a} + d = (a(-x - \frac{b}{3a})^3 + b(-x - \frac{b}{3a})^2 + c(-x - \frac{b}{3a}) + d) - \frac{2b^2}{27a^2} + \frac{cb}{3a} - d$$

- Hinweis auf die Sonderfälle $P(0|0)$ und $x = 0$