KHJ 13/2 Phillip Straub
KS 01/03 17.03.03
3M

Stochastik: Lösungen

1.1 $p("111") = \frac{günstige.Möglichkeiten}{alle.Möglichkeiten} = \frac{3!}{3^3} = \frac{2}{9}$

1.2. Insgesamt wird 57 mal gezogen. Um eine Kugel pro Urne zu erhalten, muss jeweils 19 mal gezogen werden. Die günstigen Fälle hierzu sind demzufolge: $\frac{57!}{19!*19!*19!}$, da die Kugeln nicht unterschieden werden können fallen die 19 Züge pro Urne zusammen. Für 57 Züge sind drei verschieden Fälle denkbar: $\frac{57!}{20!*19!*18!}$ oder $\frac{57!}{19!*19!*19!}$ oder $\frac{57!}{20!*20!*17!}$ für die es jeweils 6,1 und 3 Möglichkeiten gibt. Teil man die günstigen nun durch alle Möglichkeiten: $\frac{\frac{57!}{19!*19!*19!}}{\frac{57!}{20!*19!*18!}*6+\frac{57!}{20!*20!*17!}*3+\frac{57!}{19!*19!*19!}} = \frac{200}{1853}$ kommt man zu diesem Ergebnis.

1.3. Der Unterschied liegt in der Versuchsanordnung. Beim ersten Versuch geht man davon aus, das die Ereignisse (102), (003) etc. gleich wahrscheinlich sind, legt also die Wahrscheinlichkeiten fest. Beim zweiten Versuch sind sie es garantiert nicht, da sich die Wahrscheinlichkeiten anders als beim ersten Versuch erst einstellen.

2. n=2 $A(2) = 1*1 = 1$

n=3 $A(3) = 2*(\frac{1}{3}*2+\frac{2}{3}*1)*\{(\frac{1}{3}+\frac{2*1}{3*2})*1+[1-(\frac{1}{3}+\frac{1*1}{3*2})]*0\} = \frac{16}{9}$

n=4

$$A(4) = 3*(\frac{1}{4}*3+\frac{3}{4}*2)*\{(\frac{1}{4}+\frac{3*1}{4*3})*2+[1-(\frac{1}{4}+\frac{3*1}{4*3})]*1\}*\{(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3*2*1}{4*3*2})*1\} = \frac{243}{32}$$

Da dies für größere Werte sehr lange Zahlenreihen werden wird hier nur noch die allgemeine Formel für die günstigen Fälle angegeben:

$$A(n) = (n-1)\prod_{i=0}^{n-2}[(n-i-1)*\frac{i+1}{n}+(n-i-2)*(1-\frac{i+1}{n})]$$

Da diese Formel zu aufwendig ist, wird nun eine andere Methode eingeführt.

Berechnung mithilfe der Siebformel von Poincare-Sylvester:
(auf die Herleitung wird an dieser Stelle verzichtet)

E= Ereignis keiner bekommt sein Geschenk; A_i= Person i bekommt ihr Geschenk;

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i_2}\sum_{i_1<i_2} P(A_{i1}A_{i2}) + \sum_{i_3}\sum_{i_2<i_3}\sum_{i_1<i_2} P(A_{i1}A_{i2}A_{i3}) \pm \cdots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Wir setzen einige Werte in obige Formel ein:

Person i erhält ihr eigenes Geschenk $\quad P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \quad i = 1 \ldots n.$

Person i_1 und i_2 erhalten ihre eigenen $\quad P(A_{i1} \cap A_{i2}) = \frac{(n-2)!}{n!} \quad i, j \in \{1 \ldots n\}, i \neq j$

und schließlich

$$P\left(\bigcap_{\lambda=1}^{\nu} A_{i\lambda}\right) = \frac{(n-\nu)!}{n!}, \ \nu = 1, \ldots, n, \quad i_\lambda \neq i_\mu \text{ für } \lambda \neq \mu$$

Diese Werte setzen wir in die Formel von oben ein und vereinfachen sie. Somit kommen wir zu folgendem Ergebnis:

$$1 - \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$$

Wir wollen aber die Wahrscheinlichkeit, das niemand sein Geschenk bekommt, also nehmen wir das Gegenereignis:

$$1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - 1 + \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$$

2.2. A(n+1)=n[A(n)+A(n-1)]

Zu prüfen ist folglich folgende Gleichung:

Wobei k= Möglichkeiten

$$p(n+1) * k(n+1) = n[p(n) * k(n) + p(n-1) * k(n-1)]$$

Durch einsetzen erhält man die Gleichung

$$(n+1)! * \sum_{i=0}^{n+1} \frac{(-1)^i}{i!} = n * [n! * \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} + (n-1)! * \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!}]$$

durch umformen:

$$(n+1) * n! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!} = n * n! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!} + n! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!}$$

$$(n+1) * n! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!} = (n+1) * n! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!}$$

Sachverhalt gegeben.

2.3 bei n+1 Möglichkeiten hat die Person n+1: n günstige Möglichkeiten ihr Geschenk zu wählen.
bei n Möglichkeiten hat die Person n+1:n-1 günstige Möglichkeiten ihr Geschenk zu wählen.

2.4 Da das Geschenk von P bereits gezogen wurde, verhält es sich mit P's Zug folgendermaßen:

I) Er zieht das Geschenk n+1; Die Wahrscheinlichkeit dafür ist die gleiche wie wenn P sein eigenes Geschenk ziehen würde, sie zählt aber zu den günstigen Fällen:

Da nun eine Person garantiert ihr eigenes Geschenk bekommt, verschieben sich die Wahrscheinlichkeiten um exakt diesen Betrag.

$$p("n+1") = \frac{1}{n};\ \ p("niemand) = \frac{1}{n} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!}$$

Für n=8

Mindestens eine (weitere) Person bekommt ihr eigenes Geschenk:

p(8)= $1 - \frac{1}{n} - \sum_{i=o}^{7} \frac{(-1)^i}{i!} = 1 - (\frac{1}{8} + (-\frac{1}{7!} + \frac{1}{6!} ...)) = 1 - 0{,}49286... = 0{,}50714$

Genau eine (weitere) Person bekommt ihr eigenes Geschenk:

$$p(8) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{6!}{8!} = \frac{1}{8*7} = \frac{1}{56}$$

II) Er zieht nicht das Geschenk n+1, die Wahrscheinlichkeit das von n-1 Personen niemand sein eigenes Geschenk bekommt muss mit der Wahrscheinlichkeit von $p("\overline{n+1}") = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$ multipliziert werden.

$$p("\overline{n+1}") = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \quad p("niemand) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!} * \frac{n-1}{n}$$

Da nun eine Person garantiert ihr eigenes Geschenk nicht bekommt, verschieben sich die Wahrscheinlichkeiten um exakt diesen Betrag

Für n=8

Mindestens eine Person bekommt ihr eigenes Geschenk:

P(8)= $1 - \frac{7}{8} \sum_{i=o}^{7} \frac{(-1)^i}{i!} = 1 - \frac{7}{8}(-\frac{1}{7!} + \frac{1}{6!} ...) = 1 - 0{,}32188... = 0{,}67813$

Genau eine Person bekommt ihr eigenes Geschenk:

$$p(8) = \frac{8}{7} * \frac{(8-1)!}{8!} = \frac{1}{7}$$

Allgemein: $P(E) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} e^{-1} = 0{,}367879\ldots \approx 36{,}79\%.$

Literatur

http://www.kfunigraz.ac.at/imawww/peichl/statistik.pdf; (Peichel H.) Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik; (Meldung vom 14.03.03)

www-m4.mathematik.tu-muenchen.de/ m4/courses/WS02-03/Stoch1/u3.pdf; (Prof. Klüppelberg ;Prof. Lindner) Übungsblatt zur Stochastik; Meldung vom 15.03.03

http://www.math.tu-clausthal.de/Studium/Vorlesungen/WS0203/StochaI/H_Ub_KW45.ps; (Prof. Hilgert); Institut für Mathematik; (Meldung vom 15.03.03)

http://www-public.tu-bs.de:8080/~y0013790/wt.ps; (Thomas Otto); Wahrscheinlichkeitstheorie für informatiker; (Meldung vom 16.03.03)

http://www.stud.uni-hannover.de/~dh1ydm/WTSA.pdf; (Prof. Bäuerle); Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A; (Meldung vom 14.03.03)